مثال: بيّن أنه من أجل $n=5$ فإن $(U(n), .)$ تشكل زمرة تبديلية.

الحل:

$U(5) = \{\bar1, \bar2, \bar3, \bar4\}$

.	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$
$\bar1$	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$
$\bar2$	$\bar2$	$\bar4$	$\bar1$	$\bar3$
$\bar3$	$\bar3$	$\bar1$	$\bar4$	$\bar2$
$\bar4$	$\bar4$	$\bar3$	$\bar2$	$\bar1$

1- (.) تجميعي:

$$(\bar a.\bar b).\bar c = \overline{ab}.\bar c$$
$$= \overline{(a.b).c}$$
$$= \overline{a(b.c)} \quad \text{بما أن الضرب تجميعي في } Z$$
$$= \bar a.\overline{b.c}$$
$$= \bar a(\bar b.\bar c)$$

2- $\bar1$ هو حيادي القانون (.) وضوحاً من الجدول.

3- (.) تبديلي:

$$\bar a.\bar b = \overline{a.b} = \overline{b.a} = \bar b.\bar a$$

الضرب تبديلي في Z

4- $\bar1$ نظيره $\bar1 \in U(5)$

$\bar2$ نظيره $\bar3 \in U(5)$

$\bar3$ نظيره $\bar2 \in U(5)$

$\bar4$ نظيره $\bar4 \in U(5)$

الزمر الدوارة و الزمر التبديلية

تعريف (رتبة عنصر):

لتكن $(G,*)$ زمرة عدد عناصرها n منتهي (أي الزمرة G منتهية) ولتكن $a \in G$ عنصر كيفي، نعرف رتبة العنصر a بأنها أصغر عدد طبيعي موجب n يحقق $a^n = e$

حيث e هو حيادي الزمرة G

و a^n يعبر عن تشكيل a مع نفسه n مرة أي

$$a^n = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ مرة}}$$

ملاحظة:

دوماً رتبة أي عنصر تقسم عدد عناصر الزمرة.

أمثلة:

$\frac{Z}{6Z}$ زمرة تبديلية لنوجد مراتب جميع العناصر

$\bar0, \bar1, \bar2, \bar3, \bar4, \bar5$

حيث الحيادي $\bar0$

الحل: • رتبة الحيادي $\bar0$:

$\bar0^1 = \bar0$

رتبة الحيادي $\bar0$ تساوي 1

• رتبة $\bar1$:

$\bar1^1 = \bar1 \neq \bar0$

$\bar1^2 = \bar1 + \bar1 = \bar2 \neq \bar0$

$\bar1^3 = \bar2 + \bar1 = \bar3 \neq \bar0$

$\bar1^4 = \bar4 \neq \bar0$

$\bar1^5 = \bar5 \neq \bar0$

$\bar1^6 = \bar6 = \bar0$

وبالتالي رتبة $\bar1$ هي 6

• رتبة $\bar2$:

$\bar2^1 = \bar2 \neq \bar0$

$\bar2^2 = \bar2 + \bar2 = \bar4 \neq \bar0$

$\bar2^3 = \bar4 + \bar2 = \bar0$

إذاً رتبة $\bar2$ هي 3

• رتبة $\bar3$:

$\bar3^1 = \bar3 \neq \bar0$

$\bar3^2 = \bar3 + \bar3 = \bar0$

رتبة $\bar3$ هي 2

• رتبة $\bar4$:

$\bar4^1 = \bar4 \neq \bar0$

$\bar4^2 = \bar4 + \bar4 = \bar2 \neq \bar0$

$\bar4^3 = \bar2 + \bar4 = \bar0$

إذاً رتبة $\bar4$ هي 3

• رتبة $\bar5$:

$\bar5^1 = \bar5 \neq \bar0$

$\bar5^2 = \bar4 \neq \bar0$

$\bar5^3 = \bar3 \neq \bar0$

$\bar5^4 = \bar2 \neq \bar0$

$\bar5^5 = \bar1 \neq \bar0$

$\bar5^6 = \bar0$

إذاً رتبة $\bar5$ هي 6

مثال: حيث الحيادي $\bar1$

$U(10)$ زمرة تبديلية عناصرها $\{\bar1, \bar3, \bar7, \bar9\}$

لنوجد رتبة $\bar3$:

الحل:

$\bar3^1 = \bar3 \neq \bar1$

$\bar3^2 = \bar3.\bar3 = \bar9 \neq \bar1$

$\bar3^3 = \bar3.\bar3.\bar3 = \bar7 \neq \bar1$

$\bar3^4 = \bar3.\bar3.\bar3.\bar3 = \bar1$

رتبة $\bar3$ هي 4

لنوجد رتبة $\bar9$:

$\bar9^1 = \bar9 \neq \bar1$

$\bar9^2 = \bar1$

إذاً رتبة $\bar9$ هي 2

مرتبة $\bar{7}$:

$\bar{7}^1 = \bar{7}$

$\bar{7}^2 = \bar{9}$

$\bar{7}^3 = \bar{9}.\bar{7} = \bar{3}$

$\bar{7}^4 = \bar{3}.\bar{7} = \bar{1}$

اذا مرتبة $\bar{7}$ هي 4

تطبيق: حساب مراتب $U(10)$ و $U(10)$

تعريف (الزمرة الدوارة):

لتكن $(G, *)$ زمرة منتهية عدد عناصرها m ($|G| = card(G) = m$) نقول عن الزمرة G أنها زمرة دوارة إذا وجد $a \in G$ حيث مرتبته تساوي m يدعى a في هذه الحالة بمولد الزمرة G ويكون شكل أي عنصر من G هو : $a^t : 1 \leq t \leq m$

أمثلة:

$\frac{Z}{6Z}$ دوارة لأن $\bar{1}$ مرتبته تساوي 6 بالاعتماد على المثال السابق $\left|\frac{Z}{6Z}\right| = 6$

$\frac{Z}{6Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$\bar{1}^1 = \bar{1}$

$\bar{1}^2 = \bar{2}$

$\bar{1}^3 = \bar{3}$

$\bar{1}^4 = \bar{4}$

$\bar{1}^5 = \bar{5}$

$\bar{1}^6 = \bar{0}$

$G = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{0}\}$

تعميم:

الزمرة $\frac{Z}{nZ}$ دوارة مولدة $< \bar{1} >$

ملاحظة: المولد ليس وحيد (إن وجد).

2- $U(10) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$ وعناصره مرتبة $\bar{3}$ فقط هي 4 إذا $U(10)$ دوارة ومولدها $\bar{3}$

ملاحظات:

1- كل زمرة دوارة تبديلية لأنه:

ليكن y ، x عناصر من G

لدينا G زمرة دوارة إذا يوجد $a \in G$ حيث مرتبة a تساوي عدد عناصر الزمرة.

وكذلك

$x \in G \Rightarrow \exists : t_1 \in N^* \quad x = a^{t_1}$

$y \in G \rightarrow \exists : t_2 \in N^* \quad y = a^{t_2}$

ومنه

$x * y = a^{t_1} * a^{t_2} = (\underbrace{a * \cdots * a}_{t_1 \text{ مرة}}) * (\underbrace{a * \cdots * a}_{t_2 \text{ مرة}})$

$= a^{t_1 + t_2} = a^{t_2 + t_1}$

$= a^{t_2} * a^{t_1} = y * x$

2- كل زمرة دوارة تبديلية ولكن العكس غير صحيح بالضرورة (مثال لاحقا).

3- لتكن G زمرة دوارة مولدة ب a عندها نرمز ل G بالرمز التالي $G = \langle a \rangle$

4- كل زمرة عدد عناصرها p ، حيث p عدد أولي تماثل $\frac{Z}{pZ}$ أي:

ومنه أي زمرة عدد عناصرها أولي دوارة.

5- أي زمرة عدد عناصرها 4 فهي:

إما تماثل $\boxed{\frac{Z}{4Z}}$ أو $\boxed{\frac{Z}{2Z} \times \frac{Z}{2Z}}$

يوجد في G عنصر مرتبته 4

جميع العناصر ماعدا الحيادي من المرتبة 2

تطبيق:

$G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

$f_1 : R^* \longrightarrow R^* \quad f_1(x) = x$

$f_2 : R^* \longrightarrow R^* \quad f_2(x) = -x$

$f_3 : R^* \longrightarrow R^* \quad f_3(x) = \frac{1}{x}$

$f_4 : R^* \longrightarrow R^* \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$

$f \circ g$ ال

$(G, \circ)$ زمرة

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1				
f_2				f_3
f_3				
f_4				

$f_2 \circ f_4(x) = (-\frac{1}{x})$ لدينا

$R^* \xrightarrow{f_4} R^* \xrightarrow{f_2} R^*$

$f_2 \circ f_4(x) = f_2(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$